Несвојствени интеграли

Дефиниција: Нека је ф-ја f дефинисана на одсјечку $[a,+\infty)$ и нека је интеграбилна на сваком сегменту $[a,A]$, $a<A$. Ако постоји гранична вриједност

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = l$$

тада се број l назива несвојственим интегралом ф-је f на неограниченом одсјечку $[a,+\infty)$ (Ознака: $l=\int_a^{+\infty} f(x)dx$).

Ако l постоји, кажемо да $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ конвергира. У супротном, кажемо да $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ дивергира.

Границу интеграције $+\infty$ ћемо називати сингуларитетом несвојственог интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Аналогно дефинишемо $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^{b} f(x)dx$

Дефиниција: Нека је ф-ја f дефинисана на коначном одсјечку $(a,b]$ при чему није ограничена у околини тачке a и нека је интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha,b]$, $a<\alpha<b$. Ако постоји гранична вриједност

$$\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)dx = l$$

тада се број l назива несвојственим интегралом ф-је f на одсјечку $(a,b]$ (Ознака: $l=\int_a^b f(x)dx$).

Ако l постоји, кажемо да $\int_a^b f(x)dx$ конвергира. У супротном, кажемо да $\int_a^b f(x)dx$ дивергира.

Границу интеграције a називамо сингуларитетом несвојственог интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Аналоїно дефинишемо $\int_a^b f(x)dx$ када ф-ја f није дефинисана у околини тачке b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)dx$$

⌈ Коментар: Нека је f дефинисана на $\mathbb{R}$ и интеграбилна на сваком сегменту $[a,b]$, $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Тада дефинишемо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\ .$$

Нека је f дефинисана на (a,b), није дефинисана у тачкама a и b, и интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha,\beta]$, $a<\alpha<\beta<b$. Тада дефинишемо

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a^+}\lim_{\beta\to b^-}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$
⌋

1. Израчунати:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, f је дефинисана на $[2,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ једини сингуларитет је $+\infty$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{x^2+x-2} = (*)$$

⌈ Израчунајмо $\displaystyle\int_2^A\frac{dx}{x^2+x-2}$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2 \Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{(A+B)x+2A-B}{x^2+x-2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow A+B=0 \Rightarrow B=-A$

$2A-B=1 \Rightarrow 3A=1$

$A=\frac{1}{3}\quad B=-\frac{1}{3}$

Даље
$$\int_2^A \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int_2^A \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int_2^A \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\ln|x-1|\Big|_2^A - \frac{1}{3}\ln|x+2|\Big|_2^A =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\ln|A-1| - \ln 1\right) - \frac{1}{3}\left(\ln|A+2| - \ln 4\right) = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{A-1}{A+2}\right| + \frac{1}{3}\ln 4$$

$$(*) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\left|\underbrace{\frac{A-1}{A+2}}_{\to 1}\right| + \frac{1}{3}\ln 4\right) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{1}{3}\ln 4$$

2. Израчунати
$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx,\quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx,\quad a>0,\ b\neq 0$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-ax}\cos bx\,dx = \begin{bmatrix} e^{-ax}=u & \cos bx\,dx = dv \\ -ae^{-ax}dx = du & \frac{\sin bx}{b} = v \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(e^{-ax}\frac{\sin bx}{b}\Big|_0^A + \frac{a}{b}\int_0^A e^{-ax}\sin bx\,dx\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-aA}\sin bA}{b} + \frac{a}{b}\int_0^A e^{-ax}\sin bx\,dx\right)$$

$$= 0 + \frac{a}{b}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{a}{b}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{a}{b}I_2$$

Са друге стране
$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-ax}\cos bx\,dx = \begin{bmatrix} \cos bx = u & e^{-ax}dx = dv \\ -b\sin bx\,dx = du & -\frac{e^{-ax}}{a} = v \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{e^{-ax}\cos bx}{a}\Big|_0^A - \frac{b}{a}\int_0^A e^{-ax}\sin bx\,dx\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{e^{-aA}\cos bA}{a} + \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\int_0^A e^{-ax}\sin bx\,dx\right) = 0 + \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-ax}\sin bx\,dx =$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}I_2$$

Добијамо
$$\frac{a}{b}I_2 = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}I_2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)I_2 = \frac{1}{a}$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} I_2 = \frac{1}{a} \Rightarrow I_2 = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$I_1 = \frac{a}{b} I_2 = \frac{a}{a^2+b^2}$$

3. Израчунати

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \left[\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\operatorname{arctg} x = t} \\ \multicolumn{3}{c}{\frac{dx}{1+x^2}=dt} \\ x & 0 & A \\ \hline t & 0 & \operatorname{arctg} A \end{array}\ \middle|\ \begin{array}{l} A\to+\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} A \to \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\int_0^{\operatorname{arctg} A} t\,dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\operatorname{arctg} A} = \lim_{A\to+\infty}\frac{(\operatorname{arctg} A)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

4. Доказати да за Гама ф-ја

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

која је дефинисана за $p>0$ важи

(а) $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p), \ \forall p>0$

(б) $\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n\in\mathbb{N}_0$

а) $$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^p e^{-x}dx = \left[\begin{array}{ll} x^p = u & e^{-x}dx = d\theta \\ px^{p-1}dx = du, & -e^{-x} = \theta \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-x^p e^{-x}\Big|_0^A + p\int_0^A x^{p-1}e^{-x}dx\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(-A^p e^{-A} + p\int_0^A x^{p-1}e^{-x}dx\right) =$$

$$= \underbrace{-\lim_{A\to+\infty}\frac{A^p}{e^{A}}}_{=0 \text{ (сами)}} + p\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^{p-1}e^{-x}dx = p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\,\Gamma(p)$$

б) Докажимо тврђење индукцијом по n

1° $n=0 \Rightarrow \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-A}\right)\Big|_0^{+\infty} = 1 = 0!$

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n\in\mathbb{N}_0$, тј $\Gamma(n) = (n-1)!$

3° $\Gamma(n+1) \overset{(a)}{=} n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$

Дакле, из 1°, 2° и 3°, по принципу математичке индукције, слиједи да је $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$

Теорема: (Поредбени критеријум)

Нека је $0 \le f(x) \le g(x)$ за $\forall x \in [a, +\infty)$ и нека су дати несвојствени интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)d(x) \quad (1) \quad , \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (2) .$$

Тада, ако интеграл (2) конвергира, конвергира и интеграл (1). Ако интеграл (1) дивергира, дивергира и интеграл (2).

Теорема (Поредбени критеријум)

Дати су несвојствени интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (1) \quad , \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (2)$$

при чему је $f(x) \ge 0, g(x) > 0$ за $\forall x \in [a, +\infty)$ и нека је

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

Тада важи:

1) Ако је $0 < C < +\infty$, тада су интеграли (1) и (2) еквиконвергентни, тј. конвергирају или дивергирају истовремено.

2) Ако је $C = 0$ онда из конвергенције интеграла (2) следи конвергенција интеграла (1).

3) Ако је $C = +\infty$ онда из дивергенције интеграла (1) следи дивергенција интеграла (2).

Исте теореме важе и за интеграле облика $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, и $\int_a^b f(x)dx$, где је f није дефинисана у тачкама a или b.

Коментар: Пошто знамо да $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, a>0 \left(\int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{x^p}, b<0 \right)$ конвергира за $p>1$, а дивергира за $p \le 1$, ф-је $g(x) = \frac{1}{x^p}$ можемо користити за испитивање конвергенције интеграла облика $\int_a^{+\infty} f(x)dx \left(\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \right)$.

Аналогно, пошто $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ (односно $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$) конвергира за $p<1$, а дивергира за $p\geq 1$, ф-је $g(x)=\frac{1}{(x-a)^p}$ $\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$ можемо користити за испитивање конвергенције интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ коме је сингуларитет a (односно b).

1. Испитати конвергенцију интеграла:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$$

Очигледно, $+\infty$ је сингуларитет. Провјеримо има ли још сингуларитета на $[0,+\infty)$.

$f(x)=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ није дефинисана за $x^4-x^2+1=0$

Очигледно, $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[0,+\infty)$

$x^2=t$

$t^2-t+1=0$

$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}\notin\mathbb{R} \Rightarrow t_{1,2}\notin\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow x^4-x^2+1$ нема реалних нула

Дакле, $+\infty$ је једини сингуларитет. Испитаћемо конвергенцију коришћењем граничног критеријума. Прво, записаћемо

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx=\int\limits_0^{1}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$$

Како је $\int\limits_0^1\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$ Риманов, то наш интеграл конвергира акко конвергира $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$.

Даље, питамо се постоји ли $p\in\mathbb{R}$ такво да је

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^4-x^2+1}}{\frac{1}{x^p}}=c$, $0<c<+\infty$ (јер су у том случају интеграли $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ еквиконвергентни

Дакле

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^4-x^2+1}}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+2}}{x^4-x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+2}}{x^4\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^{p-2}}_{\to 1 \text{ за } p=2}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}_{\to 1}=1 \quad \text{за} \quad p=2$$

Дакле $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$ и $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ су еквиконвергентни, а како је $p=2>1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ конвергира $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$ конвергира $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$ конвергира

2. Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$$

Очигледно, $+\infty$ је једини сингуларитет, и ф-ја $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ је позитивна на $[1,+\infty)$, па ћемо примијенити претходни критеријум.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^{p-\frac{5}{3}}}_{\to 1 \text{ за } p=\frac{5}{3}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}}_{\to 1}=1 \quad \text{за} \quad p=\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ и $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$ су еквиконвергентни. Како је $p=\frac{5}{3}>1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$ конвергира $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ конвергира

3. Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$$

Ф-ја $f(x)=\frac{\ln x}{1-x^2}$ није дефинисана у тачкама 0 и 1, па су то потенцијални ~~[illegible]~~ сингуларитети.

Проверимо да ли су то стварно сингуларитети.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1-x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-2x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{-2x^2}=-\frac{1}{2}$$

Дакле, 0 јесте сингуларитет, а 1 није.

Даље, поредбени критеријум можемо применити само на позитивне ф-је, али је наша ф-ја негативна на $(0,1)$.

Међутим, ф-ја $-f(x)=\frac{-\ln x}{1-x^2}$ је позитивна на $(0,1)$, а интеграл $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ конвергира акко $\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x^2}dx$ конвергира.

За ф-ју $g(x)$ бирамо ф-ју $g(x)=\frac{1}{(x-0)^p}=\frac{1}{x^p}$.

Знамо да $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ конвергира за $p<1$, а дивергира за $p\geq 1$.

Даље, рачунамо

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\ln x}{1-x^2}}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^p\cdot(-\ln x)}{1-x^2}=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^2}}_{\to 1}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{-\ln x}^{\to\infty}}{\underbrace{x^{-p}}_{\to+\infty \text{ за } p>0}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-p\,x^{-p-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^p}{p}=0 \quad \text{за } p>0$$

Дакле, за било које $p>0$ је $\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\ln x}{1-x^2}}{\frac{1}{x^p}}=0$. Узмимо $p<1$, рецимо $p=\frac{1}{2}$. По поредбеном критеријуму, пошто је $\lim_{x\to 0^+}\frac{-f(x)}{g(x)}=0$ и $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ конвергира, то конвергира и $\int_0^1 -f(x)dx$, па конвергира и $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$

4. Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

Ф-ја $\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ није дефинисана у 0, па је то потенцијални сингуларитет.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln(\sin x)}_{\to -\infty} = -\infty$$

Дакле, 0 јесте сингуларитет нашег интеграла.

Опет, ф-ја $\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ је негативна на $(0, \frac{\pi}{2})$, али је $-\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ позитивна, а $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$ конвергира акко конвергира $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$. Као у претходном задатку, за поређење ћемо користити ф-ју $g(x) = \frac{1}{(x-0)^p} = \frac{1}{x^p}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^p}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\underbrace{x^{\frac{1}{2}-p}}_{\to +\infty \text{ за } p>\frac{1}{2}}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x}{(\frac{1}{2}-p)\, x^{-\frac{1}{2}-p}} =$$

$$= -\frac{1}{(\frac{1}{2}-p)} \lim_{x\to 0^+} \cos x \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}+p}}{\sin x} = \frac{1}{p-\frac{1}{2}} \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x^{p-\frac{1}{2}}}_{\to 0} = 0 \text{ за } p>\frac{1}{2}$$

Дакле, за $p > \frac{1}{2}$ је $\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^p}} = 0$. Узмимо $p<1$, рецимо $p = \frac{3}{4}$.

По поредбеном критеријуму, пошто је $\lim_{x\to 0^+} \frac{-f(x)}{g(x)} = 0$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}}$ конвергира, то конвергира и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x)dx$, па конвергира и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

5. Доказати да интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

дивергира за $\forall p \in \mathbb{R}$.

Очигледно, сингуларитети су 0 и $+\infty$. Растављамо овај несвојствени интеграл на

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

Сада имамо два несвојствена интеграла са по једним сингуларитетом

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ конвергира за $p<1$, дивергира за $p \geq 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ конвергира за $p>1$, дивергира за $p<1$

Дакле, за $\forall p \in \mathbb{R}$ један од интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ дивергира, па дивергира и $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

6. Показати да Бета функција

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

конвергира за $p>0, q>0$.

Очигледно, за $p>1, q>1$ $B(p,q)$ је Риманов интеграл, па конвергира. За $p<1$ је тачка 0 сингуларитет, а за $q<1$ је 1 сингуларитет. Растављамо интеграл на

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Добијени интеграли имају највише по један сингуларитет. Испитајмо конвергенције добијених интеграла.

Посматрамо $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

Подинтегрална ф-ја је $x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}$

Користимо ф-ју $g(x)=\frac{1}{x^k}$ за поређење

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{(1-x)^{q-1}}^{\to 1}}{x^{1-p-k}} = 1 \text{ за } 1-p-k=0$$

тј. $k=1-p$

Интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^k}$ конвергира за $k<1$, тј. $1-p<1$.

Дакле, $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ конвергира за $p>0$.

Даље, разматрамо интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Подинтегрална ф-ја је $x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}$

Користимо ф-ју $g(x)=\frac{1}{(1-x)^k}$ за поређење

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^{p-1}}^{\to 1}}{(1-x)^{1-q-k}} = 1 \text{ за } 1-q-k=0, \text{ тј. } k=1-q$$

Интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^k}$ конвергира за $k<1$, тј. $1-q<1$

По поредбеном критеријуму, закључујемо да $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

конвергира за $q>0$.

$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ конвергира ако конвергирају и $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ и $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, дакле за $p>0, q>0$.

7. Доказати да Гама функција

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

конвергира за $p>0$.

Сингуларитети су $+\infty$ и 0 (0 је сингуларитет за $p<1$).

Раставимо интеграл на

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^{1} x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

Интеграли са десне стране имају по један сингуларитет, подинтегралне ф-је су ненегативне, па ћемо применити поредбени критеријум за испитивање конвергенције.

Прво, посматрамо $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$. Очигледно, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x^{p-1}}e^{-x}}{\cancel{x^{p-1}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-x}=1$, па за ф-ју $g(x)$ бирамо $x^{p-1}=\frac{1}{x^{1-p}}$. Интеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^{1-p}}$ конвергира за $1-p<1$, тј. за $p>0$, па по поредбеном критеријуму $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ конвергира за $p>0$. (*)

Даље, разматрамо $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$. Како је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^k}}=\lim_{x\to+\infty}x^{p+k-1}e^{-x}=0$$ (доказати сами) за $\forall p+k-1$, па и за $k>1$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}$ конвергира за $k>1$, то по поредбеном критеријуму $\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ конвергира за $\forall p\in\mathbb{R}$. (**)

Дакле, $\Gamma(p)$ конвергира за $p>0$ (из (*) и (**)).